POLARA UNUI PUNCT ÎN RAPORT CU UN CERC

de Ion Patrascu, Craiova;
Florentin Smarandache, SUA

În cele ce urmează stabilim o legătură între noțiunea de simediană a unui triunghi şi noțiunea de polară a unui punct în raport cu un cerc.

Demonstrăm, pentru început, două proprietăți ale simedianelor.

Lema 1. Dacă în triunghiul ABC înscris într-un cerc, tangentele la acest cerc în punctele B şi C se intersectează într-un punct S, atunci AS este simediană în triunghiul ABC.

Demonstrație

Notăm cu L intersecția dreptei AS cu BC (vezi fig. 1).

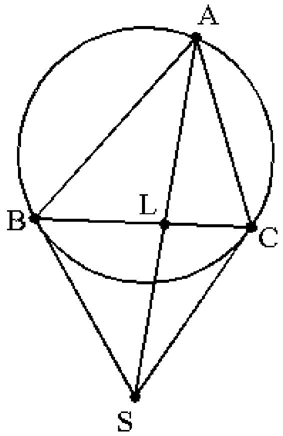


Fig. 1

Avem: $\frac{\text{Aria}\,\Delta ABL}{\text{Aria}\,\Delta ACL}=\frac{BL}{LC}=\frac{\text{Aria}\,\Delta BSL}{\text{Aria}\,\Delta CSL}$

Rezultă: $\frac{\text{Aria}\,\Delta ABS}{\text{Aria}\,\Delta ACS}=\frac{BL}{LC}$ (1)

Se observă că $m(\measuredangle ABS)=m(\hat{B})+m(\hat{A})$

$$m(\measuredangle ACS)=m(\hat{C})+m(\hat{A})$$

Obținem că $\sin(\measuredangle ABS)=\sin C$ şi $\sin(\measuredangle ACS)=\sin B$

Avem, de asemenea, că: $\frac{\text{Aria}\,\Delta ABS}{\text{Aria}\,\Delta ACS}=\frac{AB\cdot SB\cdot \sin C}{AC\cdot SC\cdot \sin B}=\frac{BL}{LC}$ (2)

Din teorema sinusurilor rezultă $\frac{\sin C}{\sin B}=\frac{AB}{AC}$ (3)

Relațiile (2) şi (3) conduc la $\frac{BL}{LC}=\left(\frac{AB}{AC}\right)^2$ ceea ce arată că AS este simediană în triunghiul ABC.

Observații

1. Demonstrația se face în mod analog dacă triunghiul ABC este obtuzunghic.

2. Dacă triunghiul ABC este dreptunghic în A, tangentele în B şi C sunt paralele, iar simediana din A este chiar înălţimea din A şi, prin urmare, este şi ea paralelă cu tangentele duse în B şi C la cercul circumscris.

Definiţia 1. Punctele A, B, C, D situate în această ordine pe dreapta d formează o diviziune armonică dacă şi numai dacă

$$\frac{AB}{AD}=\frac{CB}{CD}$$

Lema 2. Dacă în triunghiul ABC AL este simediana interioară $L_t(BC)$ şi AP este simediană exterioară $P\in BC$, atunci punctele P, B, L, C formează o diviziune armonică.

Demonstraţie

Se ştie că simediana exterioară AP în triunghiul ABC este tangentă în A la cercul circumscris (v. fig. 2), de asemenea, se arată uşor că:

$$\frac{PB}{PC}=\left(\frac{AB}{AC}\right)^2 \qquad (1)$$

Dar $$\frac{LB}{LC}=\left(\frac{AB}{AC}\right)^2 \qquad (2)$$

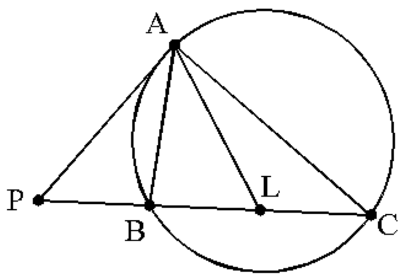


Fig. 2

Din (1) şi (2) rezultă $\frac{PB}{PC}=\frac{LB}{LC}$ ceea ce arată că punctele P, B, L, C formează o diviziune armonică.

Definiţia 2.

Dacă P este un punct exterior cercului $C(O, r)$ şi B, C intersecţiile cu cercul ale unei secante duse prin P spunem despre punctul $Q\in(BC)$ cu proprietatea $\frac{PB}{PC}=\frac{QB}{QC}$ că este conjugatul armonic al lui P în raport cu cercul $C(O, r)$.

Observaţie

De asemenea, punctul P este conjugatul punctului Q în raport cu cercul (vezi fig. 3).

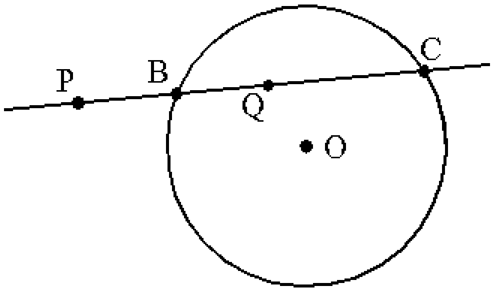


Fig. 3

Definiția 3. Mulțimea conjugatelor armonice ale unui punct în raport cu un cerc dat se numeşte **polara** punctului în raport cu cercul.

Teorema. Polara unui punct exterior unui cerc în raport cu cercul este coarda cercului determinată de punctele de tangentă cu cercul ale tangentelor duse din acel punct la cerc.

Demonstrație

Fie P un punct exterior cercului $\mathcal{C}(O, r)$ şi M, N intersecțiile dreptei PO cu cercul (vezi fig. 4). Notăm cu T şi V punctele de tangentă cu cercul ale tangentelor duse din P şi fie Q intersecția dintre MN şi TV.

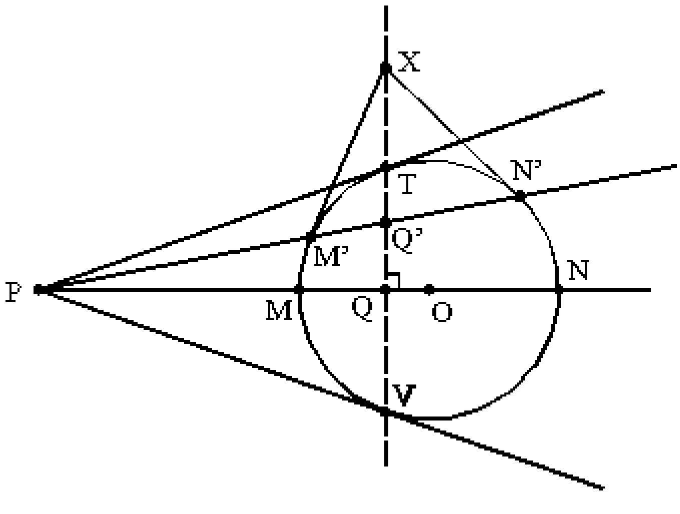


Fig. 4

Evident triunghiul MTN este dreptunghic în T, TQ este înălțimea în acest triunghi (deci simediană interioară, iar TP este simediană exterioară, aşa că punctele P, M, Q, N formează o diviziune armonică (Lema 2), deci Q este conjugatul armonic al lui P în raport cu cercul dat şi aparține polarei lui P în raport cu cercul.

Demonstrăm că (TV) este polara lui P în raport cu cercul. Fie M′N′ intersecțiile unei secante oarecare dusă prin P cu cercul şi X intersecția tangentelor duse în M′ şi N′ la cerc. Conform Lemei 1, dreapta XT este pentru triunghiul M′TN′, simediană interioară, de asemenea, TP este pentru acelaşi triunghi simediană exterioară. Dacă notăm Q′ intersecția dintre XT şi M′N′ rezultă că punctul Q′ este conjugatul armonic al lui P în raport cu cercul şi prin urmare Q′ aparține polarei lui P în raport cu cercul. Pentru triunghiul VM′N′, conform Lemei 1, dreapta VX este simediană interioară şi VP este pentru acelaşi triunghi simediană exterioară, va rezulta conform Lemei 2 că dacă $\{Q''\} = VX \cap M'N'$, punctul Q'' este

conjugatul armonic al punctului P în raport cu cercul. Deoarece conjugatul armonic al unui punct în raport cu cercul este un punct unic rezultă că $Q'=Q''$ aşa că punctele V, T, X sunt coliniare şi Q' aparține segmentului (TV).

Reciproc

Dacă $Q_1 \in (TV)$ şi PQ_1 intersectează cercul în M_1 şi N_1, trebuie să demonstrăm că punctul Q_1 este conjugatul armonic al punctului P în raport cu cercul. Fie X_1 intersecția tangentelor duse în M_1 şi N_1 la cerc, în triunghiul M_1TN_1 dreapta X_1T este simediană interioară, iar dreapta TP este simediană exterioară, dacă $\{Q_1'\} = X_1T \cap M_1N_1$ atunci P, M_1, Q_1', N_1 formează o diviziune armonică.

Analog, în triunghiul M_1VN_1 dreapta VX_1 este simediană interioară şi VP simediană exterioară, notând $\{Q_1''\} = VX_1 \cap M_1N_1$ rezultă că punctul Q_1'' este conjugatul armonic al punctului P în raport cu M_1 şi N_1. Prin urmare, obținem $Q_1' = Q_1''$. Pe de altă parte, X_1, T, Q_1' şi V, X_1, Q_1'' sunt coliniare, dar $Q_1' = Q_1''$ rezultă X_1, T, Q_1', V coliniare, dar atunci $Q_1'=Q_1$ şi prin urmare Q_1 este conjugatul lui P în raport cu cercul